## Tema 4: ¿Cuáles son las propiedades de los logaritmos?

**¿Qué aprenderé?**
A conocer y comprender las propiedades de las operaciones con logaritmos.

**¿Para qué?**
Para aplicarlas de manera eficiente y utilizarlas en ecuaciones que contengan logaritmos.

Y él ¿quién es?

**John Napier (1550-1617)**

Este matemático escocés fue quien definió los logaritmos, método ideado para simplificar el cálculo numérico con el que se redujeron todas las operaciones a la adición y sustracción. Napier publicó finalmente sus resultados en 1614 con el tratado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, fruto de un estudio de veinte años. También hizo común el uso del punto decimal en las operaciones aritméticas.

●● Actividad en pareja

**Taller**

Consideren el valor de las siguientes potencias para resolver los ejercicios:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2^0 = 1$ | $3^0 = 1$ | $4^0 = 1$ | $6^0 = 1$ |
| $2^1 = 2$ | $3^1 = 3$ | $4^1 = 4$ | $6^1 = 6$ |
| $2^2 = 4$ | $3^2 = 9$ | $4^2 = 16$ | $6^2 = 36$ |
| $2^3 = 8$ | $3^3 = 27$ | $4^3 = 64$ | $6^3 = 216$ |
| $2^4 = 16$ | $3^4 = 81$ | $4^4 = 256$ | $6^4 = 1296$ |
| $2^5 = 32$ | $3^5 = 243$ | $4^5 = 1024$ | $6^5 = 7776$ |
| $2^6 = 64$ | $3^6 = 729$ | $4^6 = 4096$ | $6^6 = 46\,656$ |

**1** Calculen los siguientes logaritmos:

a. $\log_4(4) =$ ____
b. $\log_6(1) =$ ____
c. $\log_3(1) =$ ____
d. $\log_2(2) =$ ____
e. $\log_5(5) =$ ____
f. $\log_4(1) =$ ____

- ¿Qué pueden concluir?

**2** Analicen si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a. ________ $\log_6(6 \cdot 36) = \log_6(6) + \log_6(36)$
b. ________ $\log_4(16 \cdot 256) = \log_4(16) \cdot \log_4(256)$
c. ________ $\log_2(8) + \log_2(4) = \log_2(8 \cdot 4)$
d. ________ $\log_3(9 \cdot 81) = \log_3(9) + \log_3(81)$
e. ________ $\log_2(4 + 4) = \log_2(4) + \log_2(4)$
f. ________ $\log_6(1296) + \log_6(36) = \log_6(1296 \cdot 36)$
g. ________ $\log_4(256 \cdot 4) = \log_4(256) + \log_4(4)$
h. ________ $\log_2(8 + 8) = \log_2(8) \cdot \log_2(8)$

- ¿Qué pueden concluir?, ¿ocurrirá siempre lo mismo? Expliquen.
- Escriban una expresión algebraica que represente esta relación.

**3** Analicen si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a. ________ $\log_6(216:36) = \log_6(216) - \log_6(36)$

b. ________ $\log_4(256:4) = \log_4(256) : \log_4(4)$

c. ________ $\log_2(64 - 32) = \log_2(64) : \log_2(32)$

d. ________ $\log_2(32) - \log_2(8) = \log_2(32:8)$

e. ________ $\log_3(729:27) = \log_3(729) - \log_3(27)$

f. ________ $\log_4(1024:4) = \log_4(1024) - \log_4(4)$

g. ________ $\log_2(16 - 8) = \log_2(16) - \log_2(8)$

h. ________ $\log_6(7776) - \log_6(216) = \log_6(7776:216)$

- ¿Qué pueden concluir?, ¿ocurrirá siempre lo mismo? Expliquen.
- Escriban una expresión algebraica que represente esta relación.

**4** Analicen si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a. ________ $\log_6(36^2) = 2 \cdot \log_6 36$

b. ________ $\log_4(4^4) = \log_4(4 \cdot 4)$

c. ________ $\log_2(64) = 3 \cdot \log_2(4)$

d. ________ $2 \cdot \log_3(27) = \log_3(27^2)$

- ¿Qué pueden concluir?, ¿ocurrirá siempre lo mismo? Expliquen.
- Escriban una expresión algebraica que represente esta relación.

| | Individualmente | Grupalmente |
|---|---|---|
| ¿Cómo trabajé el taller? | ○ ○ ○ | ○ ○ ○ |
| ¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller? | ○ ○ ○ | ○ ○ ○ |

## Actividades de proceso

**1.** Observa cómo se simplifica esta expresión y explica en qué consiste cada paso.

$$\log(121) + 4\log(33) - \log\sqrt[3]{\frac{9}{11}}$$

$= \log(11^2) + 4\log(3 \cdot 11) - \log\left(\frac{3^2}{11}\right)^{\frac{1}{3}}$ ______________________

______________________

$= 2\log(11) + 4[\log(3) + \log(11)] - \frac{1}{3}[2\log(3) + \log(11)]$ ______________________

______________________

$= 2\log(11) + 4\log(3) + 4\log(11) - \frac{2}{3}\log(3) - \frac{1}{3}\log(11)$ ______________________

______________________

$= \frac{17}{3}\log(11) + \frac{10}{3}\log(3)$ ______________________

______________________

- ¿Podría simplificarse más?, ¿por qué?

______________________

- Usando $\log(11) \approx 1{,}04$ y $\log(3) \approx 0{,}48$, ¿cuál es el valor de la expresión?

______________________

**2.** Analiza cómo se puede descomponer la expresión $\log\left(\frac{p^2 q}{r}\right)$, con $p, q, r, \in \mathbb{R}^+$.

$$\log\left(\frac{p^2 q}{r}\right) = \log(p^2 q) - \log(r) = \log(p^2) + \log(q) - \log(r)$$
$$= 2\log(p) + \log(q) - \log(r)$$

Descompón las siguientes expresiones, con $a, b, c, \in \mathbb{R}^+$.

**a.** $\log\left(\frac{a^2 b^3}{4}\right) =$

**b.** $\log\left(\frac{\sqrt{a}}{b c^3}\right) =$

**c.** $\log\left(\sqrt[4]{a^3 b^3 c^3}\right) =$

**3.** Analiza cómo se puede componer o reducir la expresión. Considera $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}\log(p^2) + 5\log(q) - \log\left(\sqrt[3]{p^2}\right) + \log\left(\frac{1}{q}\right) &= 2\log(p) + 5\log(q) - \frac{2}{3}\log(p) - \log(q)\\ &= \frac{4}{3}\log(p) + 4\log(q)\\ &= \log\left(\sqrt[3]{p^4}\right) + \log(q^4)\\ &= \log\left(\sqrt[3]{p^4} \cdot q^4\right)\end{aligned}$$

Reduce las siguientes expresiones:

a. $\log(900) - \log(18) - \log(9) =$

b. $-\log(24) + \frac{1}{2}\log(120) =$

c. $\log(q^3) + \log(p^2) - \frac{3}{4}\left(\log(q^2) - 5\log(p)\right) =$

¿Qué dificultades encontraste?, ¿cómo las superaste?

## En resumen

En las operaciones con logaritmos se verifican las siguientes propiedades, con $\boldsymbol{a} > 0$ y $\boldsymbol{a} \neq 1$:

- Logaritmo de la base:

$$\log_a(a) = 1$$

- Logaritmo de la unidad:

$$\log_a(1) = 0$$

- Logaritmo de una potencia:

$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x), \text{ con } x > 0,\ y \in \mathbb{R}$$

- Logaritmo de un producto:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \text{ con } x > 0,\ y > 0$$

- Logaritmo de un cociente:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y), \text{ con } x > 0,\ y > 0$$

## Actividades de práctica

1. Calcula los siguientes logaritmos, desarrollando cada expresión de modo de utilizar los valores de la tabla y una calculadora con adición, sustracción, multiplicación y división. Observa el ejemplo.

$$\log(6) = \log(2 \cdot 3) = \log(2) + \log(3) \approx 0{,}30 + 0{,}48 \approx 0{,}78$$

| | |
|---|---|
| $\log(2) \approx 0{,}30$ | $\log(11) \approx 1{,}04$ |
| $\log(3) \approx 0{,}48$ | $\log(13) \approx 1{,}11$ |
| $\log(5) \approx 0{,}70$ | $\log(17) \approx 1{,}23$ |
| $\log(7) \approx 0{,}85$ | $\log(19) \approx 1{,}28$ |

a. $\log(14)$
b. $\log(35)$
c. $\log(57)$
d. $\log(63)$
e. $\log(98)$
f. $\log(120)$
g. $\log(91)$
h. $\log(128)$

2. Verifica si las siguientes igualdades son correctas o no.

a. $\log\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{25}\right) + \log(125) + \log(\sqrt{363}) = \log(5) + \log(99)$

b. $\log\left(\dfrac{1}{a}\right) + 2\log(a) + \log(\sqrt{a}) = \dfrac{3}{2}\log(a)$, con $a \in \mathbb{R}^+$

c. $\log\left(\sqrt[4]{x^2 + 2x - 8}\right) - \dfrac{1}{4}\log\left(\dfrac{x+4}{x-2}\right) = \log(\sqrt{x-2})$, con $x > 2$

d. $\log\left(\dfrac{x\sqrt{x-1}}{x^2-1}\right) + \dfrac{1}{2}\log(x-1) = \log(x) - \log(x+1)$, con $x > 0$

3. Aplica las propiedades para reducir las siguientes expresiones a un solo logaritmo. Considera $a, b, p, q, r, s \in \mathbb{R}^+$.

a. $\log(5) + \log(8)$

b. $\log(15) + \log(15) - \log(5)$

c. $\dfrac{1}{2}\log(5) + 3\log(125)$

d. $\log(a^2 + b) - \log(a)$

e. $a\log(p) - 3c\log(q)$

f. $\log(\sqrt{p}) - 4\log(q) + \dfrac{1}{3}\left[\log(\sqrt{r}) + 2\log(s)\right]$

**4.** La relación entre el área de la superficie corporal ***a*** ($m^2$) de una persona, su masa ***m*** (kg) y su estatura ***h*** (cm) está dada por la siguiente expresión:
$\log(a) = -2{,}144 + 0{,}425 \log(m) + 0{,}725 \log(h)$.

Usa una calculadora

a. ¿Cuál es el área aproximada del cuerpo de Alex si su masa es de 70 kg y su estatura es 175 cm?

b. Si la masa corporal de Josefa es de 60 kg y su estatura es 1,6 m, ¿cuál es el área de su cuerpo aproximadamente?

c. Determina la estatura aproximada de una persona, si el área de su cuerpo es 2 $m^2$ y su masa es de 80 kg.

**5. Ciencias naturales.** El nivel de presión del sonido se puede calcular a partir de la expresión:

$N = 20 \log\left(\dfrac{p}{2 \cdot 10^{-4}}\right)$, donde ***p*** es la presión del sonido en dinas/$cm^2$.

a. Si $p = 2 \cdot 10^{-4}$ dinas/$cm^2$, ¿cuál es el nivel de presión sonora?

b. Si $p = 2 \cdot 10^{-3}$ dinas/$cm^2$, ¿cuál es el nivel de presión sonora?, ¿a cuántos pascales (Pa) equivale?

Usa 0,1 Pa = 1 dina/$cm^2$

c. Demuestra que el nivel de presión del sonido se puede expresar como
$N = 20\left(\log\left(\dfrac{p}{2}\right) + 4\right)$.

**6. Ciencias naturales.** La intensidad de la luz que ingresa a un pozo de agua va disminuyendo con la profundidad. Para describir la profundidad a la que se puede percibir un porcentaje ***p*** de luz respecto de la inicial se utiliza la siguiente relación:

$$x = -\frac{\log(p)}{0{,}9}$$

Donde $x$ se expresa en metros.

a. Analizando la relación, ¿cómo se expresa $p$? Explica.

b. Si un buceador percibe un porcentaje de luz igual al 92 % del que se percibe en la superficie, ¿a qué profundidad se encuentra?

c. ¿A qué profundidades, respectivamente, se perciben porcentajes de 80 %, 70 % y 50 %? Utiliza la calculadora y redondea el valor a dos cifras decimales.

### ¿Qué aprendí hoy?

**1** Verifica si la siguiente igualdad es correcta o no.

$$\log\left(\frac{343}{104}\right) + \log\left(\frac{\sqrt{8}}{49}\right) = \log\left(\sqrt{\frac{1}{338}}\right) + \log(7)$$

**2** Aplica las propiedades para reducir la siguiente expresión a un solo logaritmo.

$$-\log(24) + \frac{1}{2}\log(120)$$

Cuaderno página 23